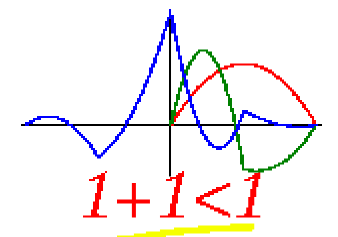
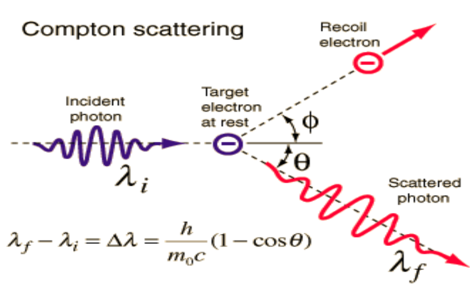
Research interests





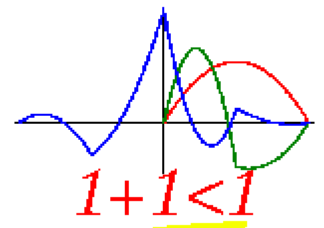
MATH QUESTION CENTER

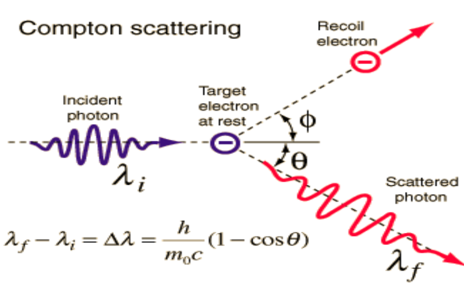
Une étude non exhaustive de fonctions définies par une relation du *type* $F(x) = \int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ *pour x dans* I *intervalle de* $\mathbb{R}$ *et f fonction de* $I \times [a, +\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$.

_ Est solaire tout ce qui s'oppose au nocturne, d'où mon slogan : ***We belong to those who reject darkness.*** Solaires, la vie, le désir et les plaisirs complices, la jubilation, l'incandescence dans la volonté de jouissance ; solaires le souci radieux, la prévenance exacerbée, la courtoisie ; solaires la douceur et la délicatesse, l'âme chevaleresque et la politesse de la rigueur. Et j'aimerais dire enfin pourquoi pour moi, l'analyse fonctionnelle est solaire. Devant une baie de cette théorie, les théorèmes sont pendus à des ficelles ; chaque concept médite et mûrit, rumine en secret la lumière ; il élabore un miel parfumé. Interversion de limites. Amoncellement du théorème de convergence dominée. Théorèmes ! j'ai mangé votre pulpe juteuse. J'ai rejeté les pépins sur terre ; qu'ils germent ! pour nous redonner le plaisir.
Recherche délicate d'équivalents ; promesse de merveille ; dérivabilité ; petit printemps qui dort en attendant. Concepts entre deux étés ; concept par l'été traversé.
Nous songerons ensuite, mes amis, à la germination douloureuse (la sueur de l'âme pour prouver l'existence d'une intégrale impropre est admirable).
Mais émerveillons-nous à présent de ceci : chaque fécondation s'accompagne de volupté. Le théorème s'enveloppe de saveur ; et de plaisir toute persévérance à la vie.
Pulpe de théorèmes, preuve sapide de l'amour. La théorie d'analyse fonctionnelle est tout entière variation sur le thème de l'ange, forme ailée du principe de délicatesse _ dont l'étymologie nous enseigne, comme une récurrence, la parenté avec ce qui rend liquide, fluidifie, vaporise jusqu'à l'éther. J'essaierais ici, de dire l'essentiel de cette belle théorie, dans un style qui magnifie le raffinement sans l'excès d'apprêt, la recherche sans la complexion maniérée, l'élégance sans l'affectation, la grâce et la subtilité sans l'inconsistance. Je me contenterai d'impulsion de direction volontaire. Délicatesse, politesse de la rigueur, bonne distance entre le réel et le concept.

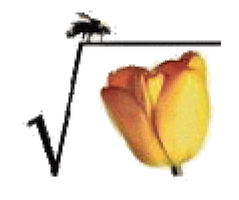








MATH QUESTION CENTER



Que vienne le temps de ceux qui savent entendre, car avec, eux, l'oreille pourrait bientôt servir à mieux lire…

Un recours naturel et permanent à l'analyse fonctionnelle, nous permet d'*entendre* l'évolution, faite de continuité et de changement, que connaissent les mots eux-mêmes, ainsi que les *corpus* des énoncés qu'animent ces mots.
Il faut une indéniable musicalité de l'entente interprétative, une oreille attentive aux accords temporels, tels que nous les trouvons chez Lebesgue, chez Riemann, chez Banach ou chez Abel, pour entendre, pour enregistrer, avec une parfaite ou presque parfaite précision, la vie temporelle et structurelle des concepts. Il faut écouter attentivement la théorie des fonctions définies par des intégrales à paramètre, le dialogue théâtral, la description conceptuelle pour glaner d'un simple mot ou d'une simple expression toute la récolte de l'histoire qui les précède, des transmutations qui se sont opérées dans les connotations et même dans les significations originelles. Peu à peu, se développe la finesse de notre réception. Nous finissons par identifier le germe de nouveauté, d'appropriation personnelle et de réorientation qu'un concept ou une définition peuvent recevoir lorsqu'ils sont utilisés par tel ou tel mathématicien, par telle ou telle dynamique délibérée d'une théorie particulière. On en retire un inestimable profit de compréhension (d'intensité de rencontre). Par le biais du tact conceptuel, le lecteur-auditeur arrive à distinguer, de manière presque subliminale, le poids, les rugosités, la portée, les connotations d'un même concept _ mais ce n'est pas le même _ qu'il trouve dans un théorème de Lebesgue, ou de Riemann. C'est la théorie qui nous apprend à quels moments après Riemann le concept de « continuité d'une fonction définie par une intégrale » acquiert une nouvelle tonalité, ou à quels carrefours après Lebesgue le concept de « dérivabilité » change de fréquence, de densité et d'écho.



La convergence uniforme sert souvent à justifier des interversions de limites mais attention : cela ne suffit pas pour intervertir une limite de fonctions, (ou une somme de séries) et une intégrale sur un intervalle non borné, I.

En fait pour justifier que $\int_I (\lim u_n) = \lim \int_I u_n$, dans ce cas on utilise un raisonnement basé sur la « **convergence dominée** » du Théorème de Lebesgue, c'est-à-dire la présence en facteur des u_n, (et de la limite u) d'une fonction indépendante de *n*, qui assure la convergence des intégrales impropres. (*voir exercices*)

On peut aussi essayer de justifier le **Théorème d'inversion des limites**.
Dans le cas particulier d'une intégrale de série, penser aux **séries alternées** ou aux **progressions géométriques** qui donnent un majorant, (ou un calcul) du reste, et permettent de conclure en justifiant directement que $\int_I \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} () \right) - \sum_{n \leq N} \int_I u_n$ qui tend vers 0 si N tend vers l'infini, (*voir exercices*)

Un autre problème souvent posé est la **recherche d'équivalents**, de la somme d'une série ou de la limite d'une suite lorsque la variable tend vers des bornes du domaine de convergence.

Ne pas oublier qu'on les obtiendra souvent par des intégralités, pouvant elles-mêmes provenir de développements limités, ou d'encadrements de sommes du type $S_N = \sum_{n=0}^{N} f(n)$ par des intégrales, lorsque *f* est monotone, (pas seulement décroissante).

Un mot des fonctions définies par des intégrales, lorsqu'il s'agit d'intégrales impropres sur un intervalle I. Une technique consiste à introduire des segments $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les bornes inférieures et supérieures ont pour limites celles de I,

d'étudier les fonctions f_n obtenues en intégrant sur I_n, par les Théorèmes de cours , et à justifier le bon type de convergence (uniforme le plus souvent) pour conclure.
En d'autres termes, la technique la plus simple consiste, après avoir justifier la convergence de l'intégrale en cause, à introduire les fonctions

$F_n(x) = \int_a^n f(x,t)\,dt$, puis à appliquer les Théorèmes ci-dessous pour conclure à une éventuelle continuité ou dérivabilité des F_n et voir enfin si la convergence des F_n vers F est uniforme, ainsi, en cas de dérivation, que celle des $F_n'(x)$ vers leur limite, pour appliquer les deux derniers Théorèmes cités ci-dessous .

THEOREME 1 __ *soit f intégrable de* $[a , b]$ *dans* E *espace de Banach. La fonction*

$$F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{est continue sur } [a , b] .$$

THEOREME 2 __ *Si f est continue de* $[a , b]$ *dans* E, *Banach la fonction*

$$F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{est dérivable sur } [a , b] \text{ de dérivée } F' = f$$

THEOREME 3 __ *Soit I un intervalle de* $\mathbb{R}$, $f : I \times [a , b] \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction continue, la fonction* $x \longmapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ *est continue sur l'intervalle* I .

THEOREME 4 __ *Soit I un intervalle de* $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \times [a , b] \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que pour tout t de* $[a , b]$ *et tout x de I ,* $\frac{\partial f}{\partial x}(x , t)$ *existe , et que* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *soit continue sur* $I \times [a , b]$.

Alors la fonction $x \longmapsto F(x) = \int_a^b f(x, t)\,dt$ *est dérivable et* $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt$.

THEOREME 5 ___ *Soit une suite de fonctions continues,* U_n *de E topologique dans F métrique qui converge uniformément vers U, la fonction U est continue.*

THEOREME 6 ___ (le dernier !) *Soit une suite* $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de fonctions du segment [a, b] de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. On suppose les* U_n *dérivables, les* U'_n *étant intégrables au sens de Riemann sur [a , b] .Si les* U_n' *convergent uniformément sur [a , b] vers les fonctions V, et si les* U_n *convergent pour une valeur* x_0 *de la variable , alors les* U_n *convergent uniformément vers une fonction U dérivable , telle que* $u(x_0) = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n(x_0)$ *et* $U' = V$.

En ce qui concerne la convergence uniforme, elle est souvent obtenue par une convergence dominée de l'intégrale, mais si elle est non absolument convergente, il ne peut pas être question de convergence dominée. Pensez alors aux découpages de l'intégrale associés aux changements de signe de la fonction intégrée, et à la majoration du reste d'une série alternée ! (*Voir exercice où j'ai employé les deux méthodes).*

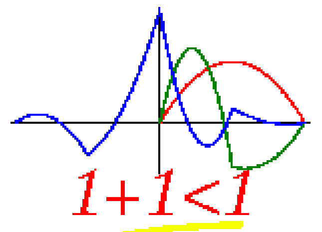
Les problèmes portant sur les intégrales impropres et les interversions de séries reposent souvent sur l'identité

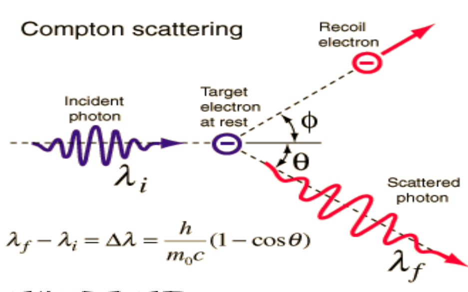
$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots + u^n + \frac{u^{n+1}}{1-u}$, si $u \neq 0$ ou sur la connaissance d'un majorant du reste dans les séries qui convergent selon leur critère.

Cette identité sert dans bien des situations, pensez-y ! !

La **transformation d'Abel** permet d'obtenir des convergences uniformes lorsque les sommes $S_{p,q}$, sont majorées uniformément par rapport au paramètre.







En fait, pour l'étude des fonctions définies par des intégrales impropres, la méthode actuelle est de s'appuyer sur les **Théorèmes de convergence dominée**, lorsqu'ils s'appliquent : on y gagne en efficacité.

Avec le **Théorème de convergence monotone**, ils constituent les outils efficaces pour l'étude des intégrales impropres absolument convergentes. Le recours aux intervalles I_n, « segments croissants » de réunion l'intervalle I d'intégration ne se justifie plus que pour les intégrales semi-convergentes.

Mais il faut garder du bon sens : si la fonction définie par une intégrale se calcule facilement, il est inutile de recourir aux Théorèmes généraux !

Fonctions sommables

Définition : *Soit f une fonction définie dans* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$. *On dit que f est sommable (ou intégrable au sens de Lebesgue) si on a* $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx < +\infty$.

L'espace des fonctions sommables est noté $\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)$

Dans la pratique, pour montrer qu'une fonction est sommable, il suffit de montrer qu'elle est majorée en module par une fonction positive d'intégrale finie.

Le théorème suivant est d'une importance capitale. La supériorité de **l'intégrale de Lebesgue** sur **l'intégrale de Riemann** est due en partie au fait que l'on peut intégrer plus de fonctions, mais elle est surtout due au fait que l'on dispose de théorèmes beaucoup plus efficaces. On comparera l'énoncé suivant, et le théorème de dérivation sous le signe somme qui en découle, aux résultats analogues fondés sur la convergence uniforme.



Théorème (de Lebesgue ou de la convergence dominée)

Soit f_j une suite de fonctions qui converge presque partout vers une fonction f. On suppose qu'il existe une fonction positive sommable fixe h telle que l'on ait

$$|f_j(x)| \leq h(x) \text{ p.p. pour tout } j.$$

On a alors

$$\begin{cases} \int_* |f(x) - f_j(x)|\,dx \longrightarrow 0 \\ \text{et} \\ \int_* f_j(x)dx \longrightarrow \int_* f(x)dx \end{cases}$$

« Les objets mathématiques sont des représentations de concepts, des résultas d'opérations définies avec rigueur. Mais on peut s'interroger sur leur « nature » »

Théorème (de dérivation sous le signe somme)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On se donne une fonction f définie sur $A \times I$ vérifiant les trois hypothèses suivantes.

(a) *Pour $\lambda \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x, \lambda)$ est sommable sur A*

(b) *La dérivée partielle $\dfrac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}$ existe en tout point de $A \times I$*

(c) *Il existe une fonction h positive et sommable sur A telle que l'on ait $\left|\dfrac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}\right| \leq h(x)$ quels que soient x et λ.*

Alors la fonction F définie par

$$F(\lambda) = \int_A f(x, \lambda)dx \qquad (1)$$

est dérivable dans I, et on a

$$F'(\lambda) = \int_A \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} dx \quad (2)$$

Mode d'emploi

Ce résultat ne prend toute sa force que si on l'accompagne des deux remarques suivantes.

1. Avant d'appliquer le théorème, on peut retirer du domaine d'intégration un ensemble de mesure nulle, ce qui ne change pas les intégrales (1) et (2), et donc ne vérifier les hypothèses que dans l'ensemble A' ainsi obtenu.

En revanche, il ne suffirait pas que, pour chaque λ, les hypothèses soient satisfaites sauf sur un sous-ensemble de A _ fût-il réduit à un point _ qui dépend de λ.

2. La dérivabilité est une propriété locale. Pour prouver que F est dérivable dans tout intervalle compact $[c, d] \subset I$. Il suffira donc de trouver des fonctions positives sommables h_{cd} qui majorent $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ en module lorsque λ parcourt $[c, d]$.

Théorème (**de continuité sous le signe somme**)

f est une fonction sur $A \times I$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction $\lambda \longmapsto f_\lambda(x) = f(x, \lambda)$ est mesurable pour chaque $\lambda \in I$ et l'on s'intéresse aux propriétés de la fonction $\lambda \longmapsto A\, ; f(x, \lambda) d\mu(x)$, où μ est une mesure positive.

Supposons que

$$\begin{cases} (a) & \lim_{\lambda \to \lambda_0} f(x, \lambda) = \zeta(x), \ \forall\, x \in A,\ \lambda_0 \in I \\ (b) & |f(x, \lambda)| \leq h(x),\ h\ \mu\text{-}\textit{intégrable},\ \forall\, \lambda \in \dot{I} \end{cases}$$

Alors

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_A f(x, \lambda) d\mu(x) = \int_A \zeta(x)\, d\mu(x).$$

Conséquence.

Si la fonction $\lambda \longmapsto f(x, \lambda)$ est continue sur A, $\forall \lambda \in I$ et s'il existe une fonction h μ-intégrable sur A telle que $|f(x, \lambda)| \leq h(x)$ alors la fonction

$$F : \lambda \longmapsto F(\lambda) = \int_A f(x, \lambda) d\mu(x) \text{ est continue sur A.}$$

Exercice I

On pose $K = \int_0^{+\infty} exp(-t^2)dt$, et on définit f par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{exp(-t^2x)}{1+t^2}\, dt$.

a) Domaine de définition de f. Continuité, dérivabilité.

b) Étudier la limite de f en $+\infty$.

c) Établir que, $\forall x > 0, f(x) = 2K\, e^x \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} exp(-t^2)dt$. En déduire la valeur de K.

Exercice II

Étudier le domaine de définition, la continuité et la dérivabilité de la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{e^t - 1} dt.$$

Calcul de F, sous forme d'une somme de série de fonctions.

Exercice III

Ensemble de définition de $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{xt}}{1+2t^2}\,dt$

Continuité, dérivabilité de la fonction F. Limite de F en 0^-.

Exercice IV

Dans l'exercice, t désigne un paramètre réel et λ la restriction à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-\pi, \pi]$, on pose

$$f_t(x) = \mathrm{Log}(1 + 2t\cos x + t^2).$$

a) Montrer que f_t est λ - intégrable et que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_t(x)dx$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer, sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$ la dérivée φ' de φ. En déduire pour φ une expression dépourvue de signe d'intégration.

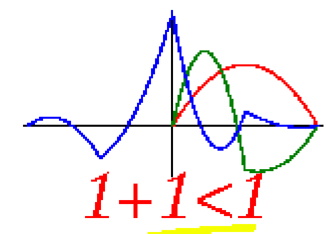
c) Montrer que si $|t| < 1$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n e^{inx}$ est convergente et que sa somme $g_t(x)$ vérifie l'égalité : $exp(g_t(x)) = 1 + te^{ix}$. Calculer pour $|t| < 1$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g_t(x)dx$. Retrouver à l'aide de ce résultat $\varphi(t)$ pour $|t| < 1$, puis un calcul direct de $\varphi(t) - \varphi\left(\frac{1}{t}\right)$, la valeur de $\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice VI

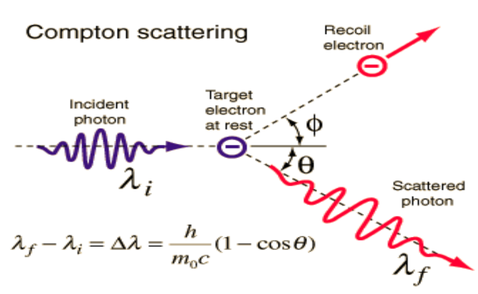
Trouver la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^3\, x\, \varphi(x)}{(1+n^2x^2)^2}\, dx$, lorsque φ est C^1 et bornée.







Research interests



MATH QUESTION CENTER

Problème

a) Soit $(\mathbb{R}, \widehat{B_{\mathbb{R}}}, \lambda)$, $f \in C^2([-1,+1])$, $f \geq 0$ ayant en 0 un maximum strict avec $f''(0) < 0$. Montrer qu'il existe $\gamma > 0$, tel que $f(s) \leq e^{-\gamma s^2} \times f(0)$, $s \in [-1,+1]$.

b) En déduire que $\int_{-1}^{+1} (f(s))^n ds \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(f(0))^{n+½}}{\sqrt{|f''(0)|}} \times \sqrt{2\pi}$, n réel, $n \longrightarrow +\infty$.

On effectuera d'abord le changement de variable $s = \frac{u}{\sqrt{n}}$ et l'on appliquera le théorème de convergence dominé de Lebesgue à $\left(\frac{f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}{f(0)}\right)^n \chi_{[-\sqrt{n},+\sqrt{n}]}(u)$,

en admettant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

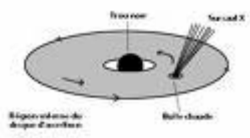
c) Application : On pose $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$.

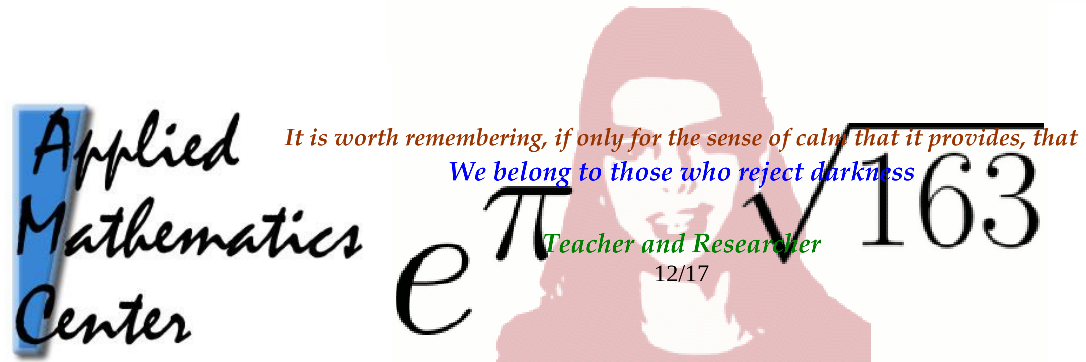
Vérifier que Γ est définie pour $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$; calculer $\Gamma(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Mettre Γ sous la forme :

$$e^{-(s-1)} \times (s-1)^s \int_{+1}^{+\infty} (f(t))^{s-1} dt, \text{ pour } s > 1,$$

avec f vérifiant les hypothèses du a). En déduire une formule asymptotique pour $\Gamma(s)$ quand s tend vers l'infini.

On montrera que $\int_{+1}^{+\infty} (f(t))^{s-1} dt \leq e^{-\delta s} \times o\left(\frac{1}{s}\right)$, pour un $\delta > 0$, quand $s \longrightarrow +\infty$ et est, par conséquent, infiniment petit par rapport à $\int_{-1}^{+1} (f(t))^{s-1} dt$.







Ma correction

a) Il résulte immédiatement du développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 de f en 0 que dans un voisinage ouvert V de 0, on a :

$f(s) = f(0) + f''(0)\,\frac{s^2}{2} + \frac{s^2}{2} \times \varepsilon(s)$ (notons que $f' = 0$) par ailleurs, toujours par Taylor,

$e^{-\gamma s^2} = 1 - \gamma\, s^2 + \frac{\gamma^2 s^4}{2}\, e^{-\theta\gamma\, s^2}$, θ, *fonction de* γ *et de* s, $\theta \in\,]0, 1[$, d'où :

Si on impose γ tel que $0 < \gamma \le \gamma_0 < -\frac{f''(0)}{2f(0)}$, alors $0 > -\gamma\, s^2 \ge -\gamma_0\, s^2 > s^2\,\frac{f''(0)}{2f(0)}$

d'où ,

$$1 > 1 - \gamma\, s^2 \ge 1 - \gamma_0\, s^2 > 1 + s^2\,\frac{f''(0)}{2f(0)}$$

comme $\frac{f(s)}{f(0)} = 1 + s^2\,\frac{f''(0)}{2f(0)} + \frac{s^2}{f(0)}\,\varepsilon(s)$. Notons que $f(0) > 0$ (f admet un maximum strict).

$$\frac{f(s)}{f(0)} \le 1 - \gamma\, s^2, \text{ pour tout } \gamma,\ 0 < \gamma \le \gamma_0 < -\frac{f''(0)}{2f(0)}\ ;$$

ceci et l'inégalité $1 - u \le e^{-u}$ pour $u \ge 0$, entraînent

$$f(s) \le f(0)\, e^{-\gamma s^2},\ \ s \in \text{adhérence de V},\ 0 < \gamma < \gamma_0\ .$$

Maintenant, dans l'ensemble compact $[-1, +1] \setminus \mathrm{V}$, $f < f(0)$ et, par conséquent,

$$\sup f = \max f = \mathrm{M} < f(0).$$

D'autre part, la famille des fonctions $\{e^{-\gamma s^2}\}$, $\gamma > 0$ tend uniformément vers 1 sur $[-1, +1] \setminus \mathrm{V}$ quand $\gamma \longrightarrow 0$. Il existe donc $\gamma_1 > 0$, tel que

$$e^{-\gamma s^2} \geq \frac{\mathrm{M}}{f(0)}, \text{ car } \frac{\mathrm{M}}{f(0)} < 1, \text{ pour } s \in [-1, +1] \setminus \mathrm{V},\ 0 < \gamma < \gamma_1 .$$

Choisissons $\gamma : 0 < \gamma < \inf(\gamma_0 , \gamma_1)$. Alors $f(s) \leq f(0)\, e^{-\gamma s^2}$, ce pour $s \in [-1, +1]$.

b) Effectuons le changement de variable $s = \frac{u}{\sqrt{n}}$,

$$\int_{-1}^{+1} (f(s))^n\, ds = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}} \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n du$$

Considérons alors $\frac{\sqrt{n}}{(f(0))^n} \int_{-1}^{+1} (f(s))^n\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\, du,$

où
$$g_n(u) = \chi_{[-\sqrt{n},\, +\sqrt{n}]}(u) \frac{f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n}{(f(0))^n}$$

Montrons d'abord que tous les éléments de la suite $(g_n)_{n \in IN}$ sont majorés par une même fonction intégrable.

En effet, $g_n(u) \leq \chi_{[-\sqrt{n},\, +\sqrt{n}]}(u) \times e^{-\gamma u^2} \leq e^{-\gamma u^2}$, avec $\gamma > 0$ car $\frac{f(s)}{f(0)} \leq e^{-\gamma s^2}$

pour tout $s \in [-1, 1]$, $\frac{f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n}{(f(0))^n} \leq \left(e^{-\gamma u^2/n}\right)^n = e^{-\gamma u^2}$,

Il reste alors à calculer $\lim_{n \to +\infty} g_n(u)$, *ie* $\lim_{n \to +\infty} e^{n \operatorname{Log}[f(u/\sqrt{n})/f(0)]}$, avec

$$f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) = f(0) + \frac{f''(0)}{2}\frac{u^2}{n} + \frac{u^2}{n}\,\varepsilon\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\text{on a } n\,Log\,\frac{f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}{f(0)} \sim \frac{f''(0)}{2f(0)}\,u^2 \text{ quand n} \longrightarrow +\infty,$$

d'où

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(u) = e^{[f''(0)/2\,f(0)]\,u^2}$$

et, par conséquent,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{[f''(0)/2\,f(0)]\,u^2}\,du\,.$$

Puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$, on a aussi, pour $\gamma > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma u^2}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}},$$

par le changement de variable $v = \sqrt{\gamma} \times u$, d'où $dv = \sqrt{\gamma}\,du$, il suffit alors de poser $\gamma = -\frac{f''(0)}{2f(0)}$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\,du = \sqrt{\frac{f(0)}{|f''(0)|}} \times \sqrt{2\pi}\,,$$

ce qui établit la formule asymptotique annoncée.

c) On vérifie immédiatement que Γ est définie pour $s > 0$. En effet au voisinage de 0, la fonction intégrée est positive et équivalente à t^{s-1} quand s tend vers 0

(s > 0), l'intégrale est de même nature que celle de t^{s-1} et converge pour $s > 0$. *Au voisinage de* $+\infty$, $e^{-s}\, t^{s-1} < \frac{1}{t^2}$.

Par intégration par parties,

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s), \text{ d'où } \Gamma(n) = (n-1)\,!, \; n \in \mathbb{N}$$

De plus remarquons que $t^{s-1} = e^{(s-1)\,\mathrm{Log}\,t}$ d'où ,

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t+(s-1)\mathrm{Log}\,t}\,dt,$$

et si l'on fait le changement de variables $t = (s-1)\,u$, avec $s > 1$, on a

$$\Gamma(s) = (s-1)^s \int_0^{+\infty} \left(e^{-u+\mathrm{Log}\,u}\right)^{(s-1)} du$$

c'est-à-dire la forme désirée, si l'on pose $u = v + 1$, $v > -1$, avec

$$f(v) = e^{-v+\mathrm{Log}(v+1)} = e^{g(v)}, \; f \geq 0\,;$$

$$f' = 0 \Leftrightarrow g' = -1 + \frac{1}{v+1} = 0, \text{ c'est-à-dire pour } v = 0, \text{ et alors}$$

$$f'' = g''(0) \times e^{g(0)} = -1.$$

Il résulte alors du *b)* que

$$\int_{-1}^{+1} (f(v))^{s-1} dv \sim \frac{1}{\sqrt{s-1}} \times \sqrt{2\pi}, \text{ quand } s \longrightarrow +\infty.$$

Il reste à voir que $\int_{1}^{+\infty} (f(v))^{s-1} dv$ est infiniment petit par rapport à $\frac{1}{\sqrt{s-1}}$, quand $s \longrightarrow +\infty$.

Or $f(v) = e^{g(v)}$, $g(v)$ décroît strictement à partir de 0 et $g(0) = 0$, donc $g(1) < 0$, et par conséquent,

$$g(v) - \frac{g(1)}{2} < 0, \ \forall\, v \geq 1,$$

$$e^{(g(v) - g(1)/2)^{(s-1)}} \leq e^{g(v) - g(1)/2} \text{ pour } s - 1 > 1 \text{ et } v \geq 1,$$

et tend vers 0 quand $s \longrightarrow +\infty$, d'où : $\int_{1}^{+\infty} e^{(-v + \text{Log}(v+1))^{(v-1)}} dv \leq e^{(g(1)/2)(s-1)} \varepsilon\left(\frac{1}{s-1}\right)$

avec $\varepsilon\left(\frac{1}{s-1}\right) \longrightarrow 0$ quand $s \longrightarrow +\infty$, ce qui établit le résultat.

On a donc $\Gamma(s) \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-(s-1)}(s-1)^{s-½}$, ou $\Gamma(s) \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-s} s^{s-½}$,

puisque

$$(s-1)^{s-½} \longrightarrow \frac{1}{e} \text{ quand } s \longrightarrow +\infty.$$

En particulier, on obtient la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+½}$